80 Montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs

Quand on ne sait pas !

On dit qu'un vecteur v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

Que faire !

On cherche à savoir si l'équation $S : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$, d'inconnue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, admet au moins un n-uplet solution. Ceci revient souvent à résoudre un système d'équations linéaires, plus précisément à savoir si ce système est compatible.

Conseils

- Revoir la méthode du pivot pour la résolution des systèmes linéaires.
- Revoir à quelle condition un système échelonné est compatible.

Exemple traité

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$: $v = (1, 2, 3)$ est-il combinaison linéaire de $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 3)$? Si oui, préciser pour quels coefficients.

Exercices

EXERCICE 80.1 Le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est- il combinaison linéaire de $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X - 1$ et $P_2(X) = (X-1)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$?

EXERCICE 80.2 Montrer que $f : x \mapsto e^x$ est combinaison linéaire de ch et sh.

EXERCICE 80.3 À quelle condition sur les réels a et b le vecteur $v = \begin{pmatrix} a \\ 5a \\ b \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Quand on ne sait pas !

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un sous-espace vectoriel de E est une partie de E qui a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la loi interne $+$ et la multiplication par scalaire de E.
Rappelons la **caractérisation des sous-espaces vectoriels** : Une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \neq \varnothing$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(v_1, v_2) \in F^2$, $v_1 + \lambda v_2 \in F$.

Que faire !

- Utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels rappelée ci-dessus.
- Autres méthodes possibles : F peut être un sous-espace vectoriel de E en tant que sous-espace engendré par une partie de E (cf. fiche 82), ou encore en tant que noyau d'une application linéaire (cf. fiche 99).

Conseils

Repérer dans quel espace vectoriel classique l'ensemble F est inclus.
Les espaces vectoriels classiques sont : $\mathbb{K}^n$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'espace $\mathbb{K}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, etc... pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour vérifier que F est non-vide, on montre en général que $\overrightarrow{0}_E \in F$.

Exemple traité

Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercices

EXERCICE 81.1 Soit F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

EXERCICE 81.2 Soit F l'ensemble des fonctions paires et G l'ensemble des fonctions impaires, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 81.3 Soit F l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y'' + y' + y = 0$$

1. Montrer que l'ensemble $C^2(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R})$.

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel engendré

Quand on ne sait pas !

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.
On veut déterminer une famille $\mathcal{A}$ de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telle que

$$F = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$$

Si une telle famille existe, cela montre que F est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathcal{A}$ est une famille génératrice de F.

Que faire !

Cela équivaut à déterminer une famille $\mathcal{G}$ de vecteurs de F telle que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$.
EXEMPLE 1 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$, le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
Pour tout $P \in F$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$.
Autrement dit, tout élément de F est combinaison linéaire de X^2, X et 1.
Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.

Conseils

Connaître les familles génératrices classiques des espaces vectoriels classiques $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple traité

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y = 3z\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercices

EXERCICE 82.1 Montrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $M_2(\mathbb{R})$ est un espace engendré par trois matrices que l'on précisera.

EXERCICE 82.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{Vect}(1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 82.3 Soit $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$. On note $\text{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(f, g)$.

Montrer qu'une famille est libre (ou liée)

83

Quand on ne sait pas !

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille **finie** de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{A}$ est libre si, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, l'implication suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \overrightarrow{0}_E \Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$$

On dit qu'une famille est liée si elle n'est pas libre.

Que faire !

- On montre donc que si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \overrightarrow{0}_E$, alors tous les scalaires λ_k sont nuls.
- Si $\mathcal{A}$ est une famille **infinie** de vecteurs de E : pour prouver qu'elle est libre, on montre que toute sous-famille finie de vecteurs de $\mathcal{A}$ est libre.
- Montrer qu'une famille $\mathcal{A}$ est liée équivaut à montrer qu'un de ses vecteurs est combinaison linéaire d'**autres** vecteurs de $\mathcal{A}$.
- Si l'espace E est de dimension finie n, une famille libre a au plus n vecteurs.

Conseils

Faire attention au corps des scalaires considéré : une famille libre sur $\mathbb{R}$ peut être liée sur $\mathbb{C}$.
Par exemple, la famille $(1, i)$ est libre sur $\mathbb{R}$ mais liée sur $\mathbb{C}$, car $1 \times 1 + i \times i = 0$ et $(1, i) \neq (0, 0)$.

Exemple traité

Soit $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ et $v_4 = (2, 0, 0)$.
Montrer que (v_1, v_2, v_3) est libre. Que dire de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) ?

Exercices

EXERCICE 83.1 Soit $P_1(X) = X + 1$, $P_2(X) = X^2 + X + 1$ et $P_3(X) = 2X^3 + 2X + 1$.
Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 83.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n+1)$, $v_n = n^2$ et $w_n = n$.

Montrer que (u, v, w) est une famille libre de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

EXERCICE 83.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 < \cdots < a_n$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : x \mapsto e^{a_i x}$.
Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel

84

Quand on ne sait pas !

On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E si elle est libre et si elle est génératrice de E.

Que faire !

- Cela équivaut à montrer que $\mathcal{A}$ est libre et que $\text{Vect}(\mathcal{A}) = E$.
- Cela équivaut à montrer que tout vecteur de E se décompose de façon unique en combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de vecteurs de $\mathcal{A}$.
- Si E est de dimension finie n, alors $\mathcal{A}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{A}$ est libre et de cardinal n.
- Si E est de dimension finie n, alors $\mathcal{A}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{A}$ est génératrice de E et de cardinal n.

Conseils

- Connaître les bases canoniques des espaces vectoriels classiques : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Utiliser la dimension de l'espace vectoriel si elle est connue, pour n'avoir à montrer que la liberté ou le caractère générateur de la famille donnée.

Exemple traité

Soit $S_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $S_2(\mathbb{R})$.

Exercices

EXERCICE 84.1 Soit F le sous-espaces des suites réelles u vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

EXERCICE 84.2 Déterminer une base de l'espace $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - 3z = 0\}$.

EXERCICE 84.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $(1, (X - \alpha), (X - \alpha)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Utiliser le théorème de la base incomplète

85

Quand on ne sait pas !

Soit $p \leq n$, deux naturels. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de E, alors il existe $n - p$ vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_n$ de E tels que $(v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_n)$ soit une base de E.

Que faire !

On choisit successivement des vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_n$ de E de sorte à conserver une famille libre.

Conseils

Si on connaît une famille génératrice $\mathcal{G}$ de E, les vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_n$ peuvent être choisis dans $\mathcal{G}$.

Exemple traité

Soit $\mathcal{L} = (X + 1, X^2 + X + 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{L}$ peut-être complétée en une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Proposer une telle base.

Exercices

EXERCICE 85.1 Soit $F = \text{Vect}((1,1,1))$. Déterminer un sous-espace G de $\mathbb{R}^3$ tel que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

EXERCICE 85.2 Soit $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Montrer qu'on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de $M_2(\mathbb{R})$, et proposer une telle base.

Extraire une base d'une famille génératrice

86

Quand on ne sait pas !

On connaît une famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_m)$ génératrice de E. On voudrait déterminer une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.
Le théorème de la base extraite nous assure de l'existence d'une telle base.
Il faut retirer des vecteurs de $\mathcal{G}$, tout en conservant une famille génératrice de E, jusqu'à obtenir une famille qui soit libre.
On utilise le fait que si un vecteur v_i de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{G}$, alors la famille obtenue en retirant v_i de la famille $\mathcal{G}$ reste une famille génératrice de E.

Que faire !

On cherche donc à voir si un des vecteurs de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres, afin de le retirer de $\mathcal{G}$ en conservant une famille génératrice de E.
Par itération de ce procédé, on retire des vecteurs de $\mathcal{G}$ jusqu'à obtenir une famille libre, qui est encore génératrice de E.
On aura alors extrait de $\mathcal{G}$ une base de E.

> Pour savoir si un des vecteurs de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres, on peut résoudre le système :
> $$S : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \overrightarrow{0}_E$$

Si la seule solution est $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (0, \ldots, 0)$, alors $\mathcal{G}$ est libre, elle est donc déjà base de E.
Sinon, S admet au moins une solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$. Il existe alors $i \in [\![1, m]\!]$ vérifiant $\lambda_i \neq 0$. Dans ce cas :

$$v_i = -\sum_{k \in [\![1,m]\!] - \{i\}} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_k$$

Par suite, v_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{G}$.
Notons $\mathcal{G}'$ la famille obtenue en retirant v_i à $\mathcal{G}$. On a donc :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{G}') = \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = E$$

La famille $\mathcal{G}'$ est donc génératrice de E.

On réitère ce procédé avec $\mathcal{G}'$, jusqu'à obtenir une famille libre, qui sera une base de E, extraite de $\mathcal{G}$.

Conseils

- Inutile de résoudre un nouveau système à chaque étape, on peut utiliser la résolution du système S initial. Par exemple pour trouver si un des vecteurs de $\mathcal{G}'$ (c'est-à-dire $\mathcal{G}$ privé de v_i) est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{G}'$, on utilise les solutions $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de S telles que $\lambda_i = 0$.
- Si la dimension r de E est connue, on sait qu'on s'arrête quand on a retiré $m - r$ vecteurs de $\mathcal{G}$. On peut aussi voir s'il n'y a pas une famille libre évidente de r vecteurs de $\mathcal{G}$: une telle famille libre sera alors directement une base de E, extraite de $\mathcal{G}$.
- Pour être sûr qu'on peut extraire une base d'une famille $\mathcal{G}$ de E, il faut d'abord s'assurer que $\mathcal{G}$ est génératrice de E.
- Rappelons qu'on ne change pas l'espace engendré par une famille de vecteurs si on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs. Par exemple,

$$\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}_((v_1, v_2, v_3 - 2v_1 + 5v_2)$$

Exemple traité

Soit $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0)$ et $v_4 = (2, -1, 2)$.
Soit $\mathcal{G} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ et $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$. Extraire de $\mathcal{G}$ une base de E.

Exercices

EXERCICE 86.1 Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X^2 + X$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = X^2 - 1$ et $P_4 = X^2 + X + 1$ et soit $\mathcal{G} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, puis en extraire une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 86.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{G} = (A, B, C, D, E, F)$
Montrer qu'on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de $M_2(\mathbb{R})$ et donner une telle base.

Calculer le rang d'une famille de vecteurs

Quand on ne sait pas !

Soit $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_m)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On appelle rang de $\mathcal{A}$ la dimension de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.
On le note $\mathrm{rg}(\mathcal{A})$.

Que faire !

Pour déterminer le rang de $\mathcal{A}$, on détermine la dimension de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.
Pour cela, on peut extraire de $\mathcal{A}$ une base de F (cf. Fiche 86). Le cardinal d'une telle base est alors la dimension de F, c'est-à-dire le rang de $\mathcal{A}$.
Ou encore, on peut modifier la famille $\mathcal{A}$, jusqu'à obtenir une base de F, sachant que les opérations élémentaires suivantes ne modifient pas l'espace engendré par $\mathcal{A}$:

- On peut remplacer un vecteur v_i de $\mathcal{A}$ par λv_i, où λ est un scalaire **non nul**.
- On peut ajouter à un vecteur v_i de $\mathcal{A}$ une combinaison linéaire d'**autres** vecteurs de $\mathcal{A}$.
- On peut retirer de $\mathcal{A}$ un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathcal{A}$.

Conseils

Si on connaît une base $\mathcal{B}$ de E, on peut chercher à modifier les vecteurs de $\mathcal{A}$ pour se ramener à des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exemple traité

Soit $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1)$ et $v_4 = (2, 1, 2)$.
Soit $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Déterminer le rang de $\mathcal{A}$.

Exercices

EXERCICE 87.1 Soit $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ et $f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $f_5 : x \mapsto 1$, appartenant à l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer le rang de $\mathcal{A} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

EXERCICE 87.2 Soit $v_1 = (1, i, -1)$, $v_2 = (1+i, i-1, -i-1)$ et $v_3 = (i, -1, -i)$.

1. Déterminer le rang de $\mathcal{A}$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.
2. Déterminer le rang de $\mathcal{A}$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.

Calculer la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels

88

Quand on ne sait pas !

Si A et B sont deux sous-espaces de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $A+B$ est un sous-espace de dimension finie et d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

Que faire !

- Si on connaît les dimensions de A, de B et de $A \cap B$, on peut utiliser la formule de Grassmann.
- Si on connaît une famille $\mathcal{A}$ génératrice de A et une famille $\mathcal{B}$ génératrice de B, alors la concaténation $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ est génératrice de $A+B$. La dimension de $A+B$ est alors le rang de $\mathcal{C}$, qu'on calcule en utilisant la fiche 94.

Conseils

Commencer par déterminer une base de A et une base de B.
En déduire une famille génératrice de $A+B$ par concaténation de ces bases, puis calculer le rang de cette famille génératrice.
Ou alors, déterminer une base de $A \cap B$ et utiliser la formule de Grassmann.

Exemple traité

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((0, 1, 1), (1, -1, 1), (2, -1, 3))$.
Déterminer la dimension de $F + G$.

Exercices

EXERCICE 88.1 Soit $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ et $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer la dimension de $F + G$.

EXERCICE 88.2 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\}$.
Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\}$. Déterminer la dimension de $F + G$.

EXERCICE 88.2 Déterminer des bases de F, G et $F \cap G$ et utiliser la formule de Grassmann.

Montrer qu'une somme de deux sous-espaces est directe

Quand on ne sait pas !

Soit A et B deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

On dit que la somme de A et de B est directe si tout vecteur de $A+B$ se décompose de façon **unique** comme la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B.
On note alors $A+B=A\oplus B$.

Que faire !

- La somme de A et de B est directe si, et seulement si, $A\cap B=\{\overrightarrow{0}_E\}$.

  > Pour montrer que la somme de A et B est directe, il suffit donc de montrer que si $v\in A\cap B$, alors $v=\overrightarrow{0}_E$.

  En effet, ceci prouve que $A\cap B\subset\{\overrightarrow{0}\}$, et l'autre inclusion est évidente car $\overrightarrow{0}_E\in A\cap B$, puisque $A\cap B$ est un sous-espace vectoriel.
- Si A et B sont de dimension finie, alors leur somme est directe si, et seulement si :

$$\dim(A+B)=\dim(A)+\dim(B)$$

  On peut donc voir si la somme de A et de B est directe en calculant les dimensions de A, de B et de $A+B$.

Conseils

Utiliser l'argument de dimension quand on trouve facilement des bases pour A et B.

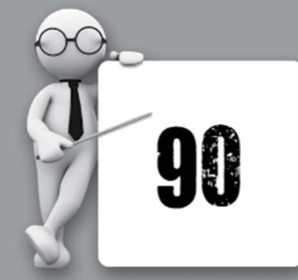
Exemple traité

Soit F l'ensemble des fonctions paires et G celui des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en somme directe.

Exercices

EXERCICE 89.1 Soit $F = \{(x, y, z),\ x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1, 0, 1))$. Montrer que F et G sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 89.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit A le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques et S le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et S sont des sous-espaces en somme directe de $M_n(\mathbb{R})$.



Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

Quand on ne sait pas !

On dit que deux sous-espaces F et G de E sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

Que faire !

Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E équivaut à

- montrer que tout vecteur de E se décompose de façon unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ;
- ou encore à montrer que $E = F + G$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

Si E est de dimension finie, montrer que F et G sont supplémentaires dans E équivaut à

- montrer que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et que $E = F + G$;
- ou montrer que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et que $F \cap G = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

Conseils

Utiliser si possible les dimensions de E, F et G.
Sinon, penser à un raisonnement par analyse et synthèse pour montrer que tout vecteur de E se décompose de façon unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple traité

Soit F l'ensemble des fonctions paires et G celui des fonctions impaires, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercices

EXERCICE 90.1 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\}$.
Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 90.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Soit $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et G l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par A.
Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

91 Montrer qu'une somme d'au moins trois sous-espaces est directe

Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces de E.

On dit que $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe si tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_n$ se décompose de façon **unique** comme la somme d'un vecteur de F_1, d'un vecteur de F_2, ..., et d'un vecteur de F_n.

La somme de sous-espace $F_1 + \cdots + F_n$ est alors notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Que faire !

Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe équivaut à montrer que

$$\forall v \in F_1 + \cdots + F_n,\ \exists!(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ v = v_1 + \cdots + v_n$$

Cela équivaut aussi à montrer que, pour tout $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \overrightarrow{0}_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ v_i = \overrightarrow{0}_E$$

Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont de dimension finie, alors leur somme est directe si et seulement si

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k)$$

Si on connaît des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ respectivement de $F_1, F_2, \ldots, F_n$, et si $\mathcal{B}$ est la famille obtenue par concaténation de ces bases, alors on a aussi la caractérisation suivante :

Les espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre.

Conseils

Ne pas appliquer les méthodes valables pour deux sous-espaces au cas où il y a au moins trois sous-espaces.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2$.

Soit $F_1 = \mathrm{Vect}(A)$, $F_2 = \{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $F_3 = \mathrm{Vect}(D)$.

Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$ qui sont en somme directe.

Exercices

EXERCICE 91.1 Dans $E = M_2(\mathbb{R})$: soit F le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et de trace nulle, H le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques, et $G = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. Montrer que F, G et H sont en somme directe.

EXERCICE 91.2 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, on note $F_k = \{P \in E,\ XP'(X) = kP(X)\}$.
Montrer que les ensembles F_k sont des sous-espaces vectoriels de E en somme directe.

Montrer qu'un espace vectoriel est somme directe d'au moins trois sous-espaces

92

Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces de E.
La somme des sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ est directe et vaut E si, et seulement si, tout vecteur de E se décompose de façon **unique** comme la somme d'un vecteur de F_1, d'un vecteur de F_2, $\ldots$, et d'un vecteur de F_n. On note alors $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$. Autrement dit :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k \Leftrightarrow \forall v \in E,\ \exists!(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ v = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Alors, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, v_i s'appelle la composante de v sur F_i.

Que faire !

- Pour montrer l'existence et l'unicité d'une telle décomposition pour chaque $v \in E$, on peut utiliser un raisonnement par analyse et synthèse, par exemple.
- Si E est de dimension finie, montrer que $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} F_k = E$ équivaut à montrer que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dim(F_k) = \dim(E)$. Ou encore, cela équivaut à montrer que la somme de $F_1, F_2, \ldots$, et F_n est directe et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dim(F_k) = \dim(E)$.

Conseils

Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ sont des bases respectivement de $F_1, F_2, \ldots, F_n$, et si $\mathcal{B}$ est la concaténation de toutes ces bases, alors $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} F_k = E$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2$.

Soit $F_1 = \text{Vect}(A)$, $F_2 = \{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $F_3 = \text{Vect}(D)$. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = M_2(\mathbb{R})$.

Exercices

EXERCICE 92.1 Dans $E = M_2(\mathbb{R})$: soit F le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et de trace nulle, soit $G = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ et soit H le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.
Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

EXERCICE 92.2 Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{3n} = 0 \text{ et } u_{3n+1} = u_{3n+2}\}$,
$G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{3n+1} = 0 \text{ et } u_{3n} = u_{3n+2}\}$ et
$H = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{3n} = u_{3n+1} = u_{3n+2}\}$.

1. Montrer que F, G et H sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.